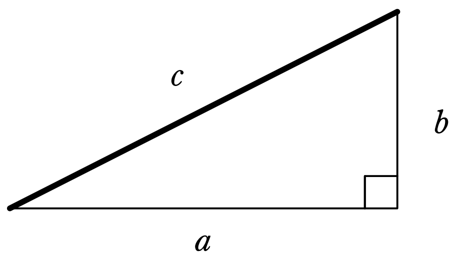
2点間の距離①

＜下準備＞



左図の直角三角形の斜辺（cのこと）を求める公式がある

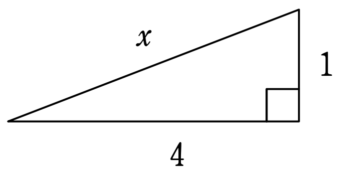
＜三平方の定理（斜辺を求める公式）＞

$c^2=a^2+b^2$　　が成り立つ。cに2乗がついてるからとって

$$\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$$

これを利用して，斜辺の長さを求めてみよう。

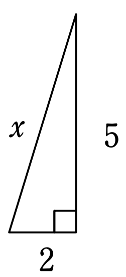
例



$$\begin{aligned} x&=\sqrt{1^2+4^2} \\ &=\sqrt{1+16} \\ &=\sqrt{17} \end{aligned}$$

答 $x=\sqrt{17}$

例

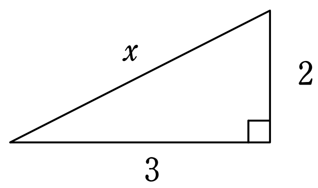


$$\begin{aligned} x&=\sqrt{2^2+5^2} \\ &=\sqrt{4+25} \\ &=\sqrt{29} \end{aligned}$$

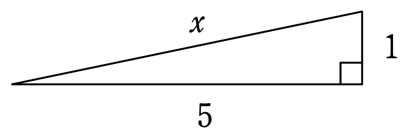
答 $x=\sqrt{29}$

問）次の直角三角形の斜辺xの値を公式$x=\sqrt{a^2+b^2}$を用いて求めよ。

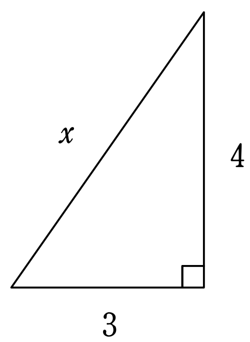
（1）



（2）

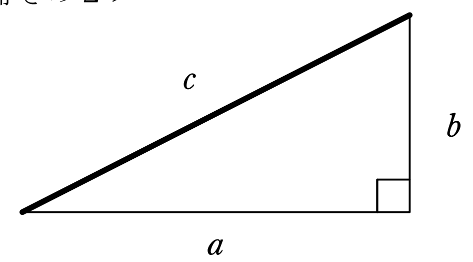


（3）



2点間の距離②

＜下準備その２＞



前ページの

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

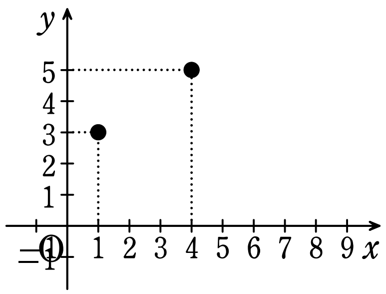
より，斜辺cの長さを出すには

a（よこ）とb（たて）の長さが分かっていればよいのです。

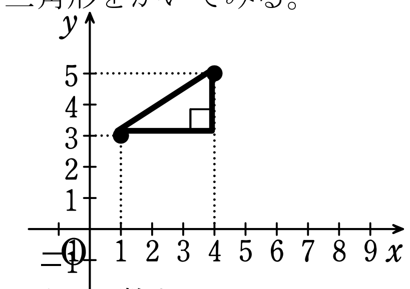
次に，よことたての長さを出す練習をxy平面でしてみましょう。

例　2点 A(1, 3)，B(4, 5) を結ぶ直角三角形のよことたての長さを求めよ。

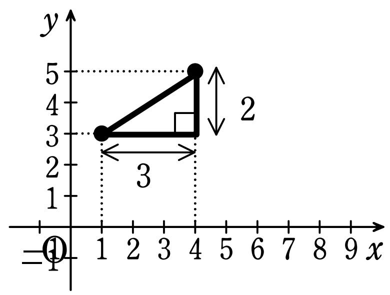
＜手順１＞　まず2点をうつ



＜手順２＞　2点を通る直角三角形をかいてみる。



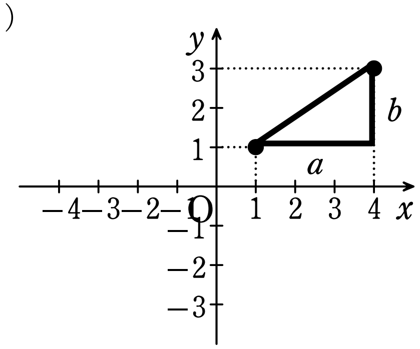
＜手順３＞　x軸とy軸のそれぞれの数を見て，長さを答える。



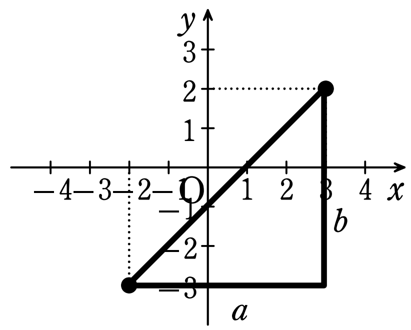
答　よこの長さ３，たての長さ２

問）次の図を見て，よこaとたてbの長さを答えよ。

（１）



（２）



問）次の2点を結ぶ直角三角形のよことたての長さを求めよ。

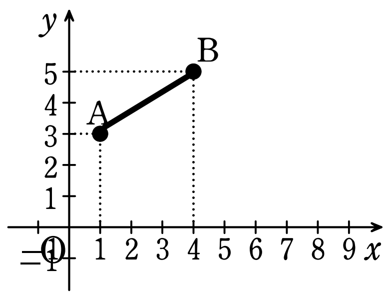
（１） A(2, 3)，B(5, 5)

（２）A(−1, −2)，B(3, 1)

（３）A(−4, −5)，B(−1, −2)

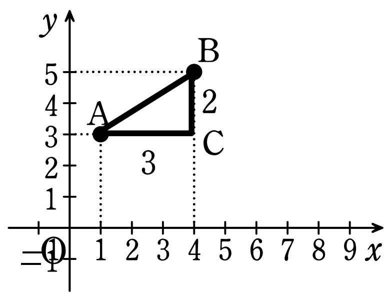
2点間の距離③

例題）2点 A(1, 3)，B(4, 5)の距離を求めよ。



AからBまでの距離
すなわち左図の
「線分ABの長さを求めよ」といっているんです。

解答



前ページのように直角三角形ABCの図をかいてやると，

AC=3（よこ）　BC=2（たて）

よって，AB$=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

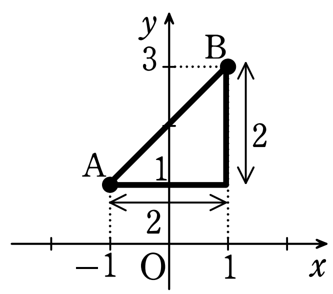
答　$\sqrt{13}$

参考 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)とおいて，同じ考え方でABを求めると

AB$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

となるが，複雑で覚えづらい公式なので，直角三角形の図を実際にかいて，
よことたての長さを測ってから，やりましょう。

例　2点 A(−1, 1)，B(1, 3)の距離を求めよ。



右図より

AB$=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

答　$2\sqrt{2}$

問）次の2点間の距離を求めよ。（教科書P.58 問7）

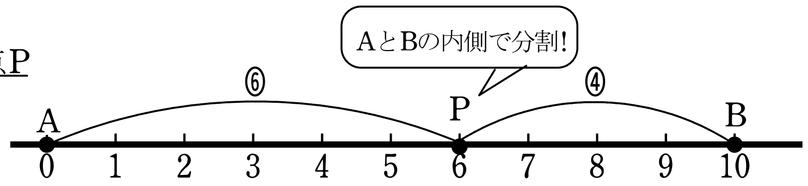
（1）A(4, 2)，B(7, 3)

（2）A(−1, 2)，B(7, −4)

（3）O(0, 0)，P(−4, 2)

（4）A(3, −2)，B(3, −9)

右図のような点Pを
<u>2点A, Bを6:4に「内分」する点P</u>
といいます。



点AとBの数がどのような数でも，また，6:4だけではなく内分の比がどのような比でも点Pの位置を特定できる便利な式が，内分点の公式 $\dfrac{na+mb}{m+n}$ です。

式が複雑なので，分母と分子でそれぞれの計算になれましょう。

例 2点A(-1)，B(9)を4:1に内分する点の座標を求めよ。

◎公式の分母の考え方と計算

「比の数を足す」だけです。比は4:1の「4」と「1」のことですね。

（分母）$=4+1=5$

◎公式の分子の考え方と計算

分子は複雑なので，文字で丸暗記は得策ではありません。因数分解のたすき掛けみたいに次の方法で，分子を計算しましょう。

＜手順①＞問題の点と比の数を横に並べた表をかく。

点	-1	9
比	4	1

＜手順②＞たすき掛けみたいに，それぞれ斜めにかけ算してみる。

点	-1	9	→	36
比	4	1	→	-1

＜手順③＞その2つの数を足してまとめる。その数が分子の数になる。

点	-1	9	→	36
比	4	1	→	-1
				35 ←この数が分子

よって，分母$=5$，分子$=35$より求める点Pの座標は$\dfrac{35}{5}=7$

答 7

例 2点A(0)，B(10)を6:4に内分する点Pの座標を求めよ。

解答

（分母）$=6+4=10$

（分子）$=60$（下表より）

点	0	10	→	60
比	6	4	→	0
				60 ←この数が分子

よって，$\dfrac{分子}{分母}=\dfrac{60}{10}=6$　　答 6　　←最初の例と一致しましたね。

問）2点A(1)，B(6)を，4:1に内分する点Pの座標を求めよ。

内分点を求める②

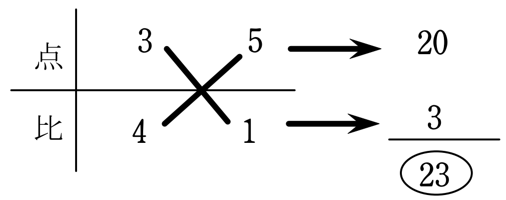
内分点の公式が分数の公式なので，答えが分数になるときもあります。計算になれましょう。

例　2点A(3)，B(5)に対して，線分ABを4:1に内分する点Pの座標を求めよ。

解答

（分母）$=4+1=5$

（分子）$=23$（右表より）



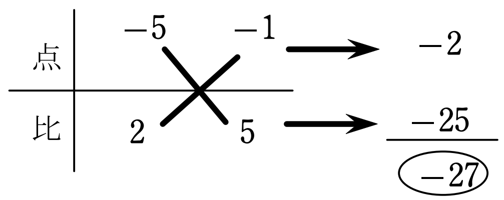
よって

答　$\dfrac{23}{5}$

例　2点A(-5)，B(-1)に対して，線分ABを2:5に内分する点Pの座標を求めよ。

（分母）$=2+5=7$

（分子）$=-27$



よって　$\dfrac{-27}{7}=-\dfrac{27}{7}$

答　$-\dfrac{27}{7}$

問）

（１）2点A(0)，B(7)に対して，線分ABを2:1に内分する点Pの座標を求めよ。

（２）2点A(1)，B(4)に対して，線分ABを3:1に内分する点Pの座標を求めよ。

（３）2点A(7)，B(-3)に対して，線分ABを2:3に内分する点Pの座標を求めよ。

（４）2点A(-5)，B(6)に対して，線分ABを2:5に内分する点Pの座標を求めよ。

xy平面上の内分点でも同じです。平面上の点の座標は例えば(2, 6)だと

$$(2,\ 6)$$

x座標　y座標

2という数はx座標の数，6という数はy座標の数を表しています。
平面上の座標の内分点は今までと同じ計算をx座標どうし，y座標どうしの数でそれぞれ計算するだけでよいのです。

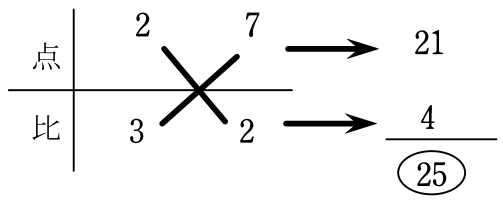
例　2点A(2, −1)，B(7, 4)を結ぶ線分ABを3:2に内分する点Pの座標を求めよ。

（考え方）

AとBのx座標の数はそれぞれ，2と7だから
点(2)と点(7)を3:2に内分する点を求める。

（分母）＝3＋2＝5

（分子）＝25

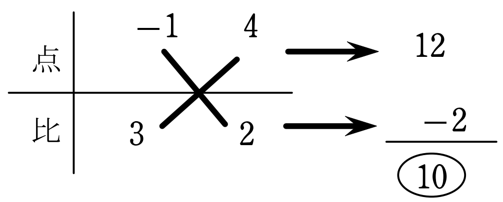


よって，x座標の内分点は $\dfrac{25}{5}=5$

同様にAとBのy座標の数はそれぞれ，−1と4だから
点(−1)と点(4)を3:2に内分する点を求める。

（分母）＝3＋2＝5

（分子）＝10



よって，y座標の内分点は$\dfrac{10}{5}=2$

よって，x座標とy座標それぞれ出たので　　答　(5, 2)

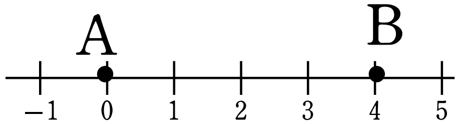
問）（教科書P.59　問8）

（１）2点A(2, 1)，B(9, 8)に対して，線分ABを4:3に内分する点Pの座標を求めよ。

（２）2点A(−2, 3)，B(6, −1)に対して，線分ABを4:3に内分する点Pの座標を求めよ。

内分する点を数直線上に図示せよという問題もあります。公式はどんな点でも比でも内分点を求めることができるので，計算ミスなく公式の計算ができれば，点を図示するのも簡単です。

例　図において，線分ABを3:1に内分する点P，3:5に内分する点Qをそれぞれ図示せよ。

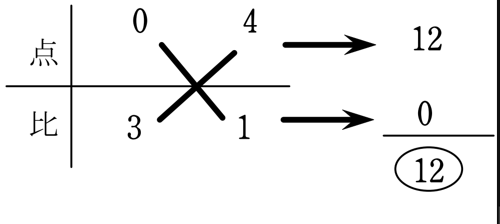


点PはA(0)，B(4)を3:1に内分するので，

（分母）＝3＋1＝4

（分子）＝12（右表より）

よって，点Pの位置は $\frac{12}{4}=3$

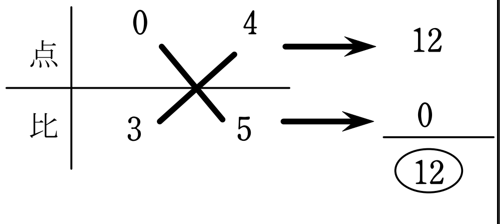


点QはA(0)，B(4)を3:5に内分するので，

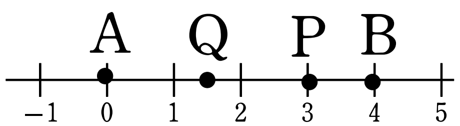
（分母）＝3＋5＝8

（分子）＝12（右表より）

よって，点Qの位置は $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}(=1.5)$



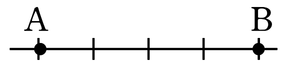
よって，P,Qは以下のように点を打てばよい。



注点Pの3:1のように，明らかに目で見て3:1と分かる点なら，わざわざ計算しなくてもよい。

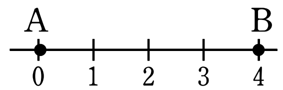
参考もし，数直線に数がかいてなかったら…

例図において，線分ABを3:1に内分する点P，3:5に内分する点Qをそれぞれ図示せよ。



＜考え方＞

自分で適当に数を振っていいです。その方が内分点がとりやすいですよね。

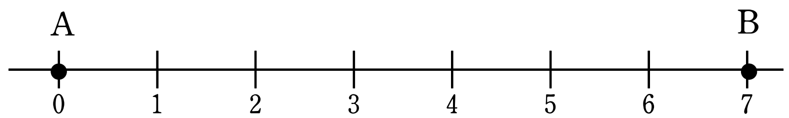


上図だと左ページの例題と同じ図なので，同じ問題になりますね。

公式を使って，内分点を出すことができます。

ちなみに，左の点Aを原点にすれば，計算しやすいです。

問）図において，線分ABを2:5に内分する点P，4:3に内分する点Qをそれぞれ図示せよ。

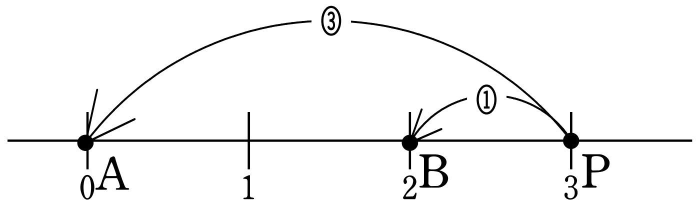


外分点を求める①

右図のような点Pを

<u>2点A, Bを3:1に「外分」する点P</u>

といいます。



　内分と違い，名前の通り線分ABの<u>外側に点がある</u>ので，やや直感的に位置が分かりづらいと思います。

　しかし，心配の必要はありません。外分も計算だけで，位置を割り出せる公式があります。しかも，内分の計算とほぼ同じなので，内分の計算が完璧なら外分点も求めることができます。それでは，外分点の計算を見てみましょう。

例 2点A(0)，B(2)を3:1に外分する点の座標を求めよ。（上図と同じです）

<考え方>

　「外分」する点を求めよという問題なら

　比の後ろの数字 3:1 の「1」をマイナスにして内分と同じ計算をするだけです。

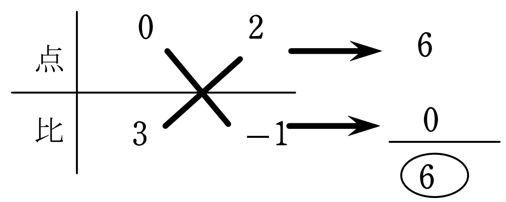
解答

　比を 3: -1 と思い込んで

　　　マイナスにする

　（分母）$=3+(-1)=2$

　（分子）$=6$（右表より）



よって，$\dfrac{6}{2}=3$

　答　3

ちゃんと図の点Pが3の場所であることが公式でも確認できましたね。

問）2点A(3)，B(9)に対して，次の点の座標を求めよ。（教科書P.54 問2）

（１）線分ABを2:1に外分する点P　（比を2: -1と思い込め！）

（２）線分ABを2:3に外分する点Q　（比を2: -3と思い込め！）

外分点を求める②

xy平面の座標でも，内分のときと同様にx座標とy座標の数でそれぞれ，外分点を計算してやればよいのです。

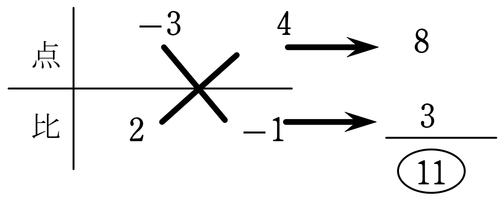
$\boxed{例}$2点 A$(-3, 6)$，B$(4, 5)$を結ぶ線分ABを$2:1$に外分する点Qの座標を求めよ。

AとBのx座標の数はそれぞれ，-3と4だから

点(-3)と点(4)を$2:1$に「外分」する点を求める。比を$2:-1$と思い込んで

（分母）$=2+(-1)=1$

（分子）$=11$（右表より）



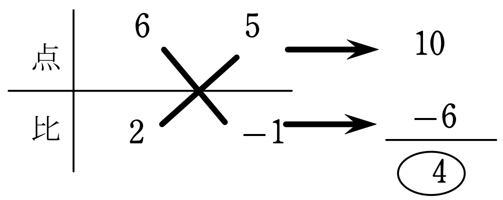
よって，x座標の外分点は $\dfrac{11}{1}=11$

AとBのy座標の数はそれぞれ，6と5だから

点(6)と点(5)を$2:1$に「外分」する点を求める。比を$2:-1$と思い込んで

（分母）$=2+(-1)=1$

（分子）$=4$（右表より）



よって，y座標の外分点は $\dfrac{4}{1}=4$

よって，x座標とy座標それぞれ出たので　　$\boxed{答}$（11，4）

問）（教科書P.59　問8）

（１）2点A$(2, 1)$，B$(9, 8)$に対して，線分ABを$4:3$に外分する点Qの座標を求めよ。

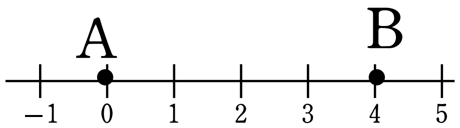
（比を$4:-3$と思い込め！）

（２）2点A$(-2, 3)$，B$(6, -1)$に対して，線分ABを$4:3$に外分する点Qの座標を求めよ。

（比を$4:-3$と思い込め！）

外分点を図示する問題も，内分のとき同様，公式を使えば条件にかかわらず必ず点の場所を割り出せるので心配いりません。

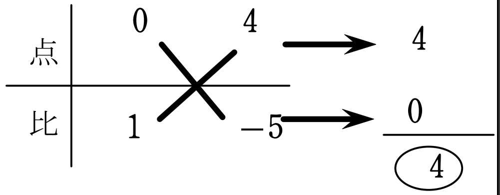
$\boxed{例}$　図において，線分ABを1:5に内分する点Pを図示せよ。



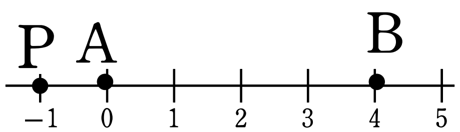
A(0)，B(4)を1:5に外分するので，比を1:−5と思い込んで

（分母）$=1+(-5)=-4$

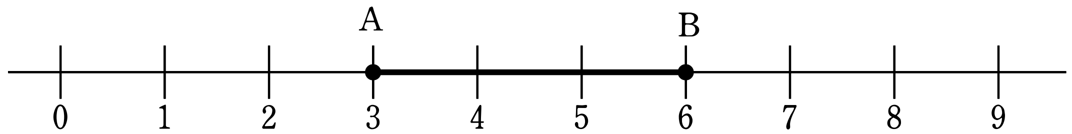
（分子）$=4$（右表より）



よって，$\dfrac{4}{-4}=-1$　なので点Pは以下の場所となる。

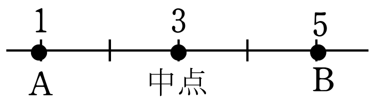


問）図において，線分ABを1:4に外分する点P，4:1に外分する点Qをそれぞれ図示せよ。



特殊な点の座標（中点，三角形の重心）

中点：2点の真ん中の点のこと



A，Bの中点は右図である。
真ん中が一番バランスのいい所なので
平均値を出すと同じ計算で出せる。

$\dfrac{1+5}{2}=\dfrac{6}{2}=3$　（「足して半分」と覚えておくとよい）

xy平面の座標でも，x座標，y座標について，それぞれ同じやり方で計算できる。

例2点 A$(1, 3)$，B$(5, 7)$ の中点Mの座標を求めよ。

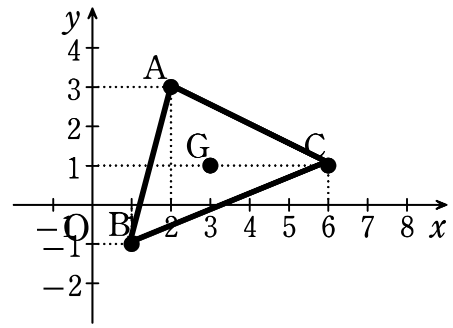
x座標の計算　$\dfrac{1+5}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

y座標の計算　$\dfrac{3+7}{2}=\dfrac{10}{2}=5$　　答　M$(3, 5)$

問）次の2点A，Bを結ぶ線分ABの中点Mの座標を求めよ。（教科書P.59　問8）

（１）A$(2, 1)$，B$(9, 8)$　　（２）A$(-2, 3)$，B$(6, -1)$

三角形の重心：三角形で一番バランスのいいところ



点A$(2, 3)$，B$(1, -1)$，C$(6, 1)$
を頂点とする三角形ABCの重心の位置は
右図のGの場所である。
中点と違い，どこにあるか見ただけでは
分かりづらい。
しかし，重心は一番バランスのいいところなので
（実際に下から重心の場所を指で支えても倒れない）
中点と同じ平均値と同じ計算でだせる。

A,B,Cのx座標の数はそれぞれ，$2, 1, 6$ なので

x座標の計算　$\dfrac{2+1+6}{3}=\dfrac{9}{3}=3$　（「足して3」で割ると覚えておくとよい）

A,B,Cのy座標の数はそれぞれ，$3, -1, 1$ なので

y座標の計算　$\dfrac{3-1+1}{3}=\dfrac{3}{3}=1$

よって，　答 G$(3,\ 1)$

次の3点を頂点とする△ABCの重心Gの座標を求めよ。（教科書P.61　問10）

（１）A$(5, -3)$，B$(4, 7)$，C$(-6, 2)$

（２）A$(0, -4)$，B$(5, 3)$，C$(2, -4)$